07.01.98 Marc Nieper <nieper@ph-cip.uni-koeln.de>
14.01.98 Sebastian Klein <sklein@mi.uni-koeln.de>

# Algebraisch abgeschlossene und reell abgeschlossene bewertete Körper

**Definition 1**
Sei $L$ die Sprache der Körper, ergänzt um ein zusätzliches einstelliges Relationszeichen $V$. Eine $L$-Struktur $\mathfrak{A}$, die Modell der Körperaxiome

$(K_0)$ $0 \neq 1$

$(K_1)$ $\forall x \forall y \;\; x + (y + z) \doteq (x + y) + z$

$(K_2)$ $\forall x \;\; x + 0 \doteq x$

$(K_3)$ $\forall x \;\; x + (-x) \doteq 0$

$(K_4)$ $\forall x \forall y \forall z \;\; x \cdot (y \cdot z) \doteq (x \cdot y) \cdot z$

$(K_5)$ $\forall x \;\; x \cdot 1 \doteq x$

$(K_6)$ $\forall x \exists y \;\; (x \cdot 0 \vee x \cdot y \doteq 1)$

$(K_7)$ $\forall x \forall y \;\; x \cdot y \doteq y \cdot x$

$(K_8)$ $\forall x \forall y \forall z \;\; (x + y) \cdot z \doteq x \cdot z + y \cdot z$

und der folgenden, das Relationszeichen $V$ betreffenden Axiome $(V_1)$ bis $(V_3)$

$(V_1)$ $V(0) \wedge V(1)$

$(V_2)$ $\forall x \forall y \;\; (V(x) \wedge V(y)) \rightarrow (V(x - y) \wedge V(x \cdot y))$

$(V_3)$ $\forall x \forall y \;\; (x \cdot y \doteq 1 \rightarrow (V(x) \vee V(y)))$

ist, heißt **bewerteter Körper**. Wir bezeichnen $\mathfrak{A}$ kurz mit $(F, \mathcal{O})$, wobei $\mathcal{O}$ die Interpretation von $V$ in $\mathfrak{A}$ sein soll. (Die Axiome $(V_1)$ bis $(V_3)$ besagen gerade, daß $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring in $F$ ist.)

Treten noch die Axiome $(AK_n)$ für alle $n \geq 1$ hinzu, die die algebraische Abgeschlossenheit von $F$ beschreiben:

$(AK_n)$ $\forall x_0 \ldots \forall x_n \exists y \;\; y^{n+1} + x_n \cdot y^n + \ldots + x_0 \doteq 0$

so spricht man von einem **algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körper**.

**Definition 2**
Sei $(F, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper. Dann heißt eine zweistellige Relation $|$ auf $F$, die den folgenden Axiomen $(D_0)$ bis $(D_5)$ genügt, eine **Bewertungsteilbarkeit** auf $F$:

$(D_0)$ $1|0 \wedge \neg(0|1)$

$(D_1)$ $\forall x \;\; x|x$

$(D_2)$ $\forall x \forall y \forall z \;\; x|y \wedge y|z \rightarrow x|z$

$(D_3)$ $\forall x \forall y \;\; x|y \vee y|x$

$(D_4)$ $\forall x \forall y \forall z \;\; x|y \rightarrow (xz)|(yz)$

$(D_5)$ $\forall x \forall y \forall z \;\; z|x \wedge z|y \rightarrow z|(x+y)$

$|$ heißt **trivial**, wenn für alle $x \in F$ gilt: $1|x$.

**Satz 1**
Ist $(F, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper, so definiert (mit $a, b \in F$)

$$a|b \quad :\Longleftrightarrow \quad ac = b \text{ für ein } c \in \mathcal{O}$$

eine Bewertungsteilbarkeit auf $F$. Ist umgekehrt $F$ ein beliebiger Körper, auf dem eine Bewertungsteilbarkeit $|$ gegeben ist, so definiert

$$\mathcal{O} := \left\{ a \in F \;\middle|\; 1|a \right\}$$

einen Bewertungsring auf $F$.

Wird zu einem Bewertungsring $\mathcal{O}$ in $F$ zunächst die zugehörige Bewertungsteilbarkeit $|_{\mathcal{O}}$ und dann hierzu wieder der Bewertungsring $\mathcal{O}_{|_{\mathcal{O}}}$ konstruiert, so gilt $\mathcal{O}_{|_{\mathcal{O}}} = \mathcal{O}$. Geht man umgekehrt von einer Bewertungsteilbarkeit $|$ aus, konstruiert dazu $\mathcal{O}_|$ und dann $|_{\mathcal{O}_|}$, so ist $|_{\mathcal{O}_|} = |$.

Also besteht eine eineindeutige Entsprechung zwischen Bewertungsringen $\mathcal{O}$ und Bewertungsteilbarkeiten $|$. Der Vorteil letzterer liegt in der folgenden Aussage.

**Lemma 1 (4.16)**
Sei $R$ ein Integritätsbereich mit einer Relation $|$, die $(D_0)$ bis $(D_5)$ erfüllt. Dann gibt es genau eine Fortsetzung von $|$ auf den Quotientenkörper $F$ von $R$, so daß $|$ auf $F$ zu einer Bewertungsteilbarkeit wird.

**Satz 2**
Sei $F$ ein Körper mit Bewertungsring $\mathcal{O}$, $\tilde{F}$ der algebraische Abschluß von $F$ und $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ zwei Bewertungsringe auf $\tilde{F}$, die $\mathcal{O}$ fortsetzen (d.h. $\mathcal{O}_i \cap F = \mathcal{O}$). Dann existiert ein Automorphismus von $\tilde{F}$ über $F$, der $\mathcal{O}_1$ auf $\mathcal{O}_2$ abbildet. [Beweis in O. Endler, "Valuation Theory", Springer 1972, C.14.3]

**Satz 3 (4.17)**
Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper mit nicht-trivialer Bewertungsteilbarkeit erlaubt Quantorenelimination.

**Korollar 1 (4.18)**
Die Theorie der nicht-trivial bewerteten, algebraisch abgeschlossenen Körper ist modellvollständig. Sie ist der Modellbegleiter der Theorie der bewerteten Körper.

**Korollar 2 (4.19)**
Die Theorie der nicht-trivial bewerteten, algebraisch abgeschlossenen Körper mit fester Charakteristik und fester Charakteristik des Restklassenkörpers ist vollständig.

* * *

**Definition 3**
Eine Struktur $\mathcal{A}$, die Modell der Körperaxiome ist und auf der eine zusätzliche Relation $<$ definiert ist, die durch die folgenden Ordnugsaxiome geregelt wird:

$$\begin{aligned}
(O_1)\ & \forall x \ \ \neg(x < x) \\
(O_2)\ & \forall x \forall y \forall z \ \ (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \\
(O_3)\ & \forall x \forall y \ \ (x < y \vee x \doteq y \vee y < x) \\
(OK_1)\ & \forall x \forall y \forall z \ \ (x < y \rightarrow x + z < y + z) \\
(OK_2)\ & \forall x \forall y \ \ (0 < x \wedge 0 < y \rightarrow 0 < x \cdot y)
\end{aligned}$$

heißt **angeordneter Körper**. Wir bezeichnen die Struktur $\mathfrak{A}$ kurz mit $(F, <)$. Werden außerdem die Axiome

$$(RK_1) \ \forall x \exists y \ \ (x < 0 \lor x \doteq y^2)$$
$$(RK_{2n}) \ \forall x_0 \ldots \forall x_{2n} \exists y \ \ y^{2n+1} + x_{2n} \cdot y^{2n} + \ldots + x_1 \cdot y + x_0 \doteq 0$$

erfüllt, so spricht man von einem **reell abgeschlossenen angeordneten Körper**.

**Definition 4**
Auf einem angeordneten Körper $(F, <)$ heißt ein Bewertungsring bezüglich $<$ **konvex**, wenn für alle $a, b \in F$ gilt:

$$0 \leq a \leq b \ \land \ b \in \mathcal{O} \implies a \in \mathcal{O}$$

Eine Bewertungsteilbarkeit $|$ auf $(F, <)$ heißt mit $<$ **verträglich**, wenn für alle $a, b \in F$ gilt:

$$0 \leq a \leq b \implies b | a$$

Offenbar entsprechen dann die bezüglich $<$ kovexen Bewertungsringe von $F$ genau den mit $<$ verträglichen Bewertungsteilbarkeiten von $F$.

**Satz 4 (4.20)**
Die Theorie der reell abgeschlossenen Körper mit verträglicher nicht-trivialer Bewertungsteilbarkeit erlaubt Quantorenelimination.

**Korollar 3 (4.22)**
Die Theorie der reell abgeschlossenen Körper mit nicht-trivialem konvexem Bewertungsring ist modellvollständig und vollständig. Sie ist der Modellbegleiter der Theorie der angeordneten Körper mit konvexem Bewertungsring.