Der Satz von Gauß/Bonnet

Sebastian Klein <sklein@mi.uni-koeln.de>

15. April 1999

Aus der elementaren Differentialgeometrie kennt man den Satz von Gauß/Bonnet für (zweidimensionale) Riemannsche Gebiete, der, für (unberandete) Mannigfaltigkeiten formuliert, im Wesentlichen so lautet:

Satz 1
Sei M eine *zweidimensionale*, orientierte, riemannsche, kompakte Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

$$\int_M \frac{K}{2\pi} \operatorname{vol}^M = X^{(M)}$$

Hierbei ist K die Gaußsche Krümmung und $X^{(M)}$ die Euler-Charakteristik von M.

Natürlich will man diesen Satz auf Mannigfaltigkeiten höherer Dimension verallgemeinern. Weil die Euler-Charakteristik von Mannigfaltigkeiten ungeradzahliger Dimension stets verschwindet, kann man sich dabei auf Mannigfaltigkeiten geradzahliger Dimension beschränken.

In höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten gibt es keine Gaußsche Krümmung mehr, nur noch den Krümmungstensor R. Also muß bei der Verallgemeinerung an die Stelle der Gaußschen Krümmung ein anderer Integrand treten, der mit dem Krümmungstensor zusammenhängen wird.

Um diesen Integranden, den sogenannten Gauß/Bonnet-Integranden, hinschreiben zu können, muß man zuerst einige Vorbereitungen treffen. Das soll im folgenden Abschnitt geschehen.

1 Vorbereitungen

Das r-fache äußere Produkt eines Vektorraums

(Hierzu vergleiche auch die Abschnitte A.19 und A.20.)

Es sei V ein Vektorraum der Dimension $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und $r \in \{2, \dots, n\}$. Dann existiert (bis auf Isomorphie) genau ein Vektorraum $\bigwedge^r V$, versehen mit einer alternierenden, multilinearen Abbildung

$$\wedge : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r} \to \textstyle\bigwedge^r V \ , \ (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$$

so daß für jeden weiteren Vektorraum W und jede *alternierende* Abbildung $A \in \mathrm{Alt}^r(V,W)$ genau eine *lineare* Abbildung $\tilde{A} \in L(\bigwedge^r V, W)$ existiert, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^r V \arrow[dr, "\tilde{A}"] & \\
V \times \ldots \times V \arrow[u, "\wedge"] \arrow[r, "A"'] & W
\end{tikzcd}$$

kommutativ wird. $\bigwedge^r V$ nennt man *ein Modell des r-fachen äußeren Produkts* von V. Seine Elemente heißen *r-Vektoren von V*. 2-Vektoren nennt man auch *Bivektoren.*

Was sollte man über das r-fache äußere Produkt wissen?

- Es gilt:

  $$\dim \bigwedge^r V = \binom{r}{n}$$

  Insbesondere ist $\bigwedge^r V = \{0\}$ für $r > n$.

- $\bigwedge^r V$ wird zwar von den r-Vektoren der Form $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ (diese heißen *zerfallende r-Vektoren*) erzeugt, dennoch haben (für $2 \leq r \leq n-2$) nicht alle r-Vektoren diese Form. (Das liegt daran, daß das Bild einer r-linearen Abbildung i.A. kein Vektorraum ist.)

- Ist V ein (pseudo-)euklidischer Vektorraum (mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$), so existiert genau ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle^{(r)}$ auf $\bigwedge^r V$, so daß gilt:

  $$\forall v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_r \in V \ : \ \langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_r, w_1 \wedge \ldots \wedge w_r\rangle^{(r)} = \det(\langle v_i, w_k\rangle)_{i,k}$$

- Ist $A \in \mathrm{End}_-(V)$ ein bezüglich einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ schiefadjungierter Endomorphismus, so existiert genau ein Bivektor $\Omega^A \in \bigwedge^2 V$, so daß gilt:

  $$\forall v, w \in V \ : \ \langle \Omega^A, v \wedge w\rangle^{(2)} = \langle Av, w\rangle$$

- Ist V zusätzlich orientiert und $(a_1, \ldots, a_n)$ eine positiv orientierte ONB von V, so heißt

  $$\mathbf{e} := a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in \bigwedge^n V$$

  der *positiv orientierte n-Einheitsvektor von V*; dieser ist von der speziellen Wahl der ONB $(a_1, \ldots, a_n)$ unabhängig. (Beachte: $\dim \bigwedge^n V = \binom{n}{n} = 1$.)

Das r-fache äußere Produkt von Vektorbündeln

Sei $\pi : E \to B$ ein Vektorbündel der Faserdimension n und $r \in \{2, \ldots, n\}$. Dann erhält man, indem man faserweise das r-fache äußere Produkt $\bigwedge^r E_b$ bildet, ein neues Faserbündel $\bigwedge^r E \to B$ der Faserdimension $\binom{r}{n}$, das man das *r-fache äußere Produkt von π* nennt und mit $\bigwedge^r \pi$ bezeichnet.

Ist das Bündel π mit einer Riemannschen Fasermetrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ versehen, so erhält man für das Bündel $\bigwedge^r\pi : \bigwedge^r E \to B$ eine entsprechende Fasermetrik $\langle\cdot,\cdot\rangle^{(r)}$.

Ist π darüberhinaus mit einer kovarianten Ableitung ∇ versehen, so erhält man eine kovariante Ableitung $\nabla^{(r)}$ für $\bigwedge^r\pi$, welche durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet ist (dabei ist $f : M \to B$ eine C^∞-Abbildung):

$$\begin{aligned}\forall X \in \mathfrak{X}(M)\ \forall Y_1,\ldots,Y_r \in \Gamma_f(\pi)\ :\ & \nabla_X^{(r)}(\overbrace{Y_1\wedge\ldots\wedge Y_r}^{\in\Gamma_f(\bigwedge^r\pi)}) \\ &= \sum_{i=1}^{r}(Y_1\wedge\ldots\wedge Y_{i-1}\wedge\nabla_X Y_i\wedge Y_{i+1}\wedge\ldots\wedge Y_r)\end{aligned}$$

(Diese Gleichung besagt gerade, daß $\wedge$ bezüglich $\nabla^{(r)}$ parallel ist.)

Ist die kovariante Ableitung ∇ metrisch bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$, d.h. gilt die Ricci-Identität

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M)\ \forall V,W \in \Gamma(\pi)\ :\ X\cdot\langle V,W\rangle = \langle\nabla_X V,W\rangle + \langle V,\nabla_X W\rangle$$

so ist auch $\nabla^{(r)}$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle^{(r)}$ metrisch, also gilt dann:

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M)\ \forall V,W \in \Gamma(\textstyle\bigwedge^r\pi)\ :\ X\cdot\langle V,W\rangle^{(r)} = \langle\nabla_X^{(r)}V,W\rangle^{(r)} + \langle V,\nabla_X^{(r)}W\rangle^{(r)}$$

Ist π darüberhinaus mit einer Orientierung versehen, so setzen sich die m-Einheitsvektoren $\mathbf{e}_b \in \bigwedge^m E_b$ zu einem auf ganz B definierten C^∞-Feld $\mathbf{E} \in \Gamma(\bigwedge^r\pi)$ zusammen. Dieses ist $\nabla^{(m)}$-parallel, d.h. es gilt $\nabla^{(m)}\mathbf{E} = 0$.

Das alternierende Produkt vektorwertiger Differentialformen

Seien $\pi_1 : E_1 \to B$, $\pi_2 : E_2 \to B$ und $\pi : E \to B$ Vektorbündel über B, $l : E_1 \times_B E_2 \to E$ eine faserweise bilineare C^∞-Abbildung (ein "C^∞-Produkt"), $f : M \to B$ eine C^∞-Abbildung, $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, $r := r_1 + r_2$ und $\omega_i \in \Omega_f^{r_i}(\pi_i)$ für $i \in \{1,2\}$.

Dann wird das *alternierende Produkt von ω_1 mit ω_2 bezüglich l*, das ich mit $(\omega_1\wedge\omega_2)^l \in \Omega_f^r(\pi)$ bezeichne, definiert durch:

$$\begin{aligned}\forall X_1,\ldots,X_r \in \mathfrak{X}(M)\ :\ & (\omega_1\wedge\omega_2)^l(X_1,\ldots,X_r) \\ &:= \frac{1}{r_1!\cdot r_2!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sign}(\sigma)\cdot l\left(\omega_1(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(r_1)}),\omega_2(X_{\sigma(r_1+1)},\ldots,X_{\sigma(r)})\right)\end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathfrak{S}_r$ die Menge aller Permutationen der Menge $\{1,\ldots,r\}$.

Das Symbol “$\wedge$” kann also, je nach Zusammenhang, zwei verschiedene Bedeutungen haben: Es kann entweder das äußere Produkt von Vektoren oder das Dachprodukt von Differentialformen bezeichnen. Vorsicht ist geboten.

Das alternierende Produkt ist assoziativ, sofern die zugrundeliegenden Produkte assoziativ gewählt werden. Genauer:

Es seien insgesamt sechs Vektorbündel über B gegeben: $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_{12}, \pi_{23}, \pi$, deren Totalräume mit $E_1, E_2, E_3, E_{12}, E_{23}, E$ bezeichnet seien. Weiter seien als Produktabbildungen gegeben:

$$
\begin{aligned}
l_{12} &: E_1 \times_B E_2 \to E_{12} \\
l_{23} &: E_2 \times_B E_3 \to E_{23} \\
l &: E_{12} \times_B E_3 \to E \\
\tilde{l} &: E_1 \times_B E_{23} \to E
\end{aligned}
$$

Sind diese Produkte assoziativ, d.h. gilt $l \circ (l_{12}, \mathrm{id}_{E_3}) = \tilde{l} \circ (\mathrm{id}_{E_1}, l_{23})$, so ist auch das alternierende Produkt diesbezüglich assoziativ, soll heißen, daß für $\omega_i \in \Omega_f^{r_i}(\pi_i)$ $(i \in \{1,2,3\})$ gilt:

$$\big((\omega_1 \wedge \omega_2)^{l_{12}} \wedge \omega_3\big)^l = \big(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)^{l_{23}}\big)^{\tilde{l}}$$

Deshalb werde ich im Folgenden auch faserweise k-fach lineare Abbildungen l zulassen und dann das alternierende Produkt von k Differentialformen bezüglich l betrachten; dieses bezeichne ich mit $(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)^l$.

Das alternierende Produkt ist tatsächlich alternierend, und zwar in folgendem Sinne: Definiert man zu gegebenem l die Abbildung $\check{l}$ durch $\check{l}(v_2, v_1) := l(v_1, v_2)$, so gilt:

$$\forall \omega_1 \in \Omega_f^{r_1}(\pi_1), \omega_2 \in \Omega_f^{r_2}(\pi_2) \ : \ (\omega_2 \wedge \omega_1)^{\check{l}} = (-1)^{r_1 r_2} \cdot (\omega_1 \wedge \omega_2)^l$$

Das “$\curlywedge$”-Produkt

Ein wichtiger Spezialfall des alternierenden Produkts vektorwertiger Differentialformen ist der folgende: Sei $\pi : E \to B$ ein Vektorbündel, $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$, $p := p_1 + \ldots + p_k$ und $l^\wedge$ die folgende faserweise multilineare C^∞-Abbildung:

$$
\begin{aligned}
l^\wedge : {\textstyle\bigwedge}^{p_1}\pi \times_B \ldots \times_B {\textstyle\bigwedge}^{p_k}\pi &\to {\textstyle\bigwedge}^{p}\pi \\
(v_1, \ldots, v_k) &\mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_k
\end{aligned}
$$

(Hierbei ist “$\wedge$” im Sinne des r-fachen äußeren Produkts eines Vektorraums zu verstehen.)

Nach dem Vorangegangenen erhält man durch $l^\wedge$ ein alternierendes Produkt für Differentialformen $\omega_i \in \Omega_f^{r_i}(\bigwedge^{p_i}\pi)$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$, das ich mit $\curlywedge$ bezeichne:

$$\omega_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \omega_k := (\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)^{l^\wedge} \;\in\; \Omega^r_f(\textstyle\bigwedge^p \pi)$$

(Hierbei ist "$\wedge$" im Sinne des alternierenden Produkts von Differentialformen zu verstehen. — Beim Bilden von "$\curlywedge$" addieren sich also sowohl die Grade r_i der Differentialformen als auch die Grade p_i der Vektoren.) Das $\curlywedge$-Produkt ist assoziativ und gehorcht der folgenden Vertauschungsregel:

$$\forall \omega_1 \in \Omega^{r_1}_f(\textstyle\bigwedge^{p_1}\pi), \omega_2 \in \Omega^{r_2}_f(\textstyle\bigwedge^{p_2}\pi) \;:\; \omega_2 \curlywedge \omega_1 = (-1)^{p_1 p_2 + r_1 r_2}(\omega_1 \curlywedge \omega_2)$$

Ist π zusätzlich mit einer kovarianten Ableitung ∇ versehen, so ist $l^\wedge$ parallel bzgl. der von ∇ induzierten kovarianten Ableitungen auf $\bigwedge^i \pi$. Daher gilt:

$$\forall \omega_i \in \Omega^{r_i}_f(\textstyle\bigwedge^{p_i}\pi) \;:\; \mathrm{d}^{\overset{(p)}{\nabla}}(\omega_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \omega_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{r_1 + \ldots + r_{i-1}} (\omega_1 \curlywedge \ldots \curlywedge \omega_{i-1} \curlywedge \mathrm{d}^{\overset{(p_i)}{\nabla}} \omega_i \curlywedge \omega_{i+1} \curlywedge \ldots \curlywedge \omega_k)$$

Die bivektorwertige Krümmungsform

Manchmal (z.B. bei Professor Dombrowski) findet man eine Definition des Krümmungstensors, die sich von der unseren um den Faktor (-1) unterscheidet. Dann muß man auch in der Definition der Schnittkrümmung und der Gaußschen Krümmung diesen Faktor einfügen, damit eine Sphäre weiterhin positive Krümmung hat. Der Faktor $(-1)^r$ beim Gauß/Bonnet-Integranden (s.u.) entfällt in diesem Falle.

Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Ableitung ∇ und Krümmungstensor $R \in \Omega^2(\mathrm{End}_-(TM))$. Wegen der Aussage über die eineindeutige Beziehung zwischen schiefadjungierten Endomorphismen und Bivektoren existiert genau eine Form $\Omega := \Omega^R \in \Omega^2(\bigwedge^2 TM)$, die *biventorwertige Krümmungsform von M*, so daß gilt:

$$\forall X, Y, V, W \in \mathfrak{X}(M) \;:\; \langle \Omega(X,Y), V \wedge W \rangle^{(2)} = \langle R(X,Y)V, W \rangle$$

Aus der zweiten Bianchi-Identität $\mathrm{d}^\nabla R = 0$ folgt die Gleichung

$$\mathrm{d}^{\overset{(2)}{\nabla}} \Omega = 0 \quad ,$$

die wieder als Bianchi-Identität bezeichnet wird.

2 Der Satz von Gauß/Bonnet

Im Folgenden sei M eine orientierte, riemannsche Mannigfaltigkeit von *geradzahliger Dimension* $m = 2r$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei ihre riemannsche Metrik, $\mathcal{O}^M$ ihre Orientierung (mit Volumenform vol^M), ∇ ihre Levi-Civita-kovariante Ableitung, $R = R^\nabla \in \Omega^2(M, \mathrm{End}_-(TM, \langle\cdot,\cdot\rangle))$ der zugehörige Krümmungstensor und $\Omega \in \Omega^2(M, \bigwedge^2 TM)$ die entsprechende bivektorwertige Krümmungsform.

Definition 1
Die Form

$$\chi^M := \frac{(-1)^r}{r!(2\pi)^r} \langle \mathbf{E}, \underbrace{\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \Omega}_{r} \rangle^{(m)} \in \Omega^m(M)$$

heißt der *Gauß/Bonnet-Integrand* von M.

Theorem 1 (Satz von Gauß/Bonnet)
Ist M kompakt, so gilt

$$\int_M \chi^M = X^{(M)}$$

Dabei ist $X^{(M)} \in \mathbb{Z}$ die *Euler-Charakteristik* von M, eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit M.

Beispiel 1
Sei M eine Mannigfaltigkeit mit richtungsunabhängiger Schnittkrümmung; das soll heißen, daß für jedes $p \in M$ die Schnittkrümmungsfunktion $K_p : G_2^*(T_pM, \langle\cdot,\cdot\rangle_p) \to \mathbb{R}$ konstant, etwa gleich $C(p) \in \mathbb{R}$ ist. Dann wird hierdurch eine Funktion $C : M \to \mathbb{R}, p \mapsto C(p)$ definiert. (Im Falle $r \geq 2$ folgt hieraus, sofern M zusammenhängend ist, nach dem Satz von Schur schon, daß M konstante Schnittkrümmung hat; im Falle $r = 1$ ist C die Gaußsche Krümmung von M.) Mit dieser Funktion gilt für den Gauß/Bonnet-Integranden:

$$\chi^M = 2\frac{C^r}{\lambda^m(S^m)} \mathrm{vol}^M$$

Hierbei ist $\lambda^m(S^m)$ das m-Volumen (die "Oberfläche") der m-dimensionalen Sphäre $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ vom Radius 1; es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \lambda^n(S^n) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{(2\pi)^r}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2r-1)} & \text{falls} \quad n = 2r \\ 2 \cdot \frac{\pi^r}{(r-1)!} & \text{falls} \quad n = 2r-1 \end{cases} \qquad (r \in \mathbb{N})$$

Ist $m = 2$, so ist M automatisch von richtungsunabhängiger Schnittkrümmung. Daher erhält man in diesem Falle den "klassischen" Satz von Gauß/Bonnet (Satz 1) zurück.

Beispiel 2
Sei M eine zweidimensionale kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit vom Geschlecht ("Anzahl der Löcher") $g \geq 2$. Dann kann man zeigen, daß die Euler-Charakteristik $X^{(M)} = 2(1-g)$ ist. Ebenso kann man zeigen, daß M mit einer riemannschen Metrik der konstanten Krümmung -1 versehen werden kann; diese werde mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet.

Nach Beispiel 1 gilt dann für den Gauß/Bonnet-Integranden

$$\chi^M = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{vol}^{(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)}$$

Daher gilt für das Volumen von M bezüglich dieser Metrik:

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \mathrm{vol}^{(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)} = -2\pi \int_M \chi^M \overset{\substack{\text{Gauß/}\\ \text{Bonnet}}}{=} -2\pi X^{(M)} = 4\pi(g-1)$$

Insbesondere hat also die Brezelfläche ($g=2$), versehen mit dieser riemannschen Metrik, die gleiche Oberfläche wie die Sphäre S^2, nämlich 4π.

Beispiel 3
Sei M eine orientierte, riemannsche, kompakte, zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Gaußscher Krümmung K. Gilt

$$\forall p \in M \ : \ K(p) \geq 0 \quad \text{und} \quad \exists p \in M \ : \ K(p) > 0$$

so folgt schon, daß M diffeomorph zur Sphäre S^2 ist; außerdem ist $\int_M K = 4\pi$.

Beispiel 4
Sei M eine orientierte, riemannsche, kompakte, zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Gaußsche Krümmung überall verschwindet. Dann ist M diffeomorph zum Torus $S^1 \times S^1$.

3 Die Transgressionsform des Gauß/Bonnet-Integranden

Definition 2
Sei M eine m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$SM := \{e \in TM \mid \langle e, e\rangle = 1\} \subset TM$$

eine $(2m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von TM. Mit der kanonischen Fußpunktabbildung $\pi : SM \to M$ erhält man ein Faserbündel, das sogenannte *Einheitstangentialbündel von M*.

Von hier ab gelten die Generalvoraussetzungen des Abschnitts 2.

Definition 3
Eine Differentialform $\Pi \in \Omega^{m-1}(SM)$ heißt eine *Transgressionsform für* χ^M *auf dem Bündel* $\pi : SM \to M$, wenn gilt:

(i) $-\mathrm{d}\Pi = \pi^*(\chi^M)$

(ii) $\forall p \in M \;:\; \lambda^{m-1}(S^{m-1}) \cdot \iota_p^*\Pi = \mathrm{vol}^{S_pM}$

Hierbei ist $\iota_p : S_pM \hookrightarrow SM$ die Inklusion, vol^{S_pM} die Volumenform der orientierten Sphäre S_pM im orientierten euklidischen Vektorraum T_pM und $\lambda^{m-1}(S^{m-1})$ das $(m-1)$-Volumen der $(m-1)$-Sphäre mit Radius 1 (dazu vgl. Beispiel 1 oben).

Lemma-Theorem 2
Es existiert eine Transgressionsform für χ^M auf $\pi : SM \to M$. Insbesondere ist also $\pi^*(\chi^M)$ exakt.

(Dieses Theorem ist gleichzeitig der erste Beweisschritt für den Satz von Gauß/Bonnet, daher die Bezeichnung.)

Beweis
Zum Beweis des Lemma-Theorems definiert man tatsächlich eine Form $\Pi \in \Omega^{m-1}(SM)$, von der man dann im Wesentlichen "algebraisch" nachrechnet, daß sie die Bedingungen aus der Definition der Transgressionsform erfüllt.

Dazu sei $U : SM \hookrightarrow TM$ die Inklusionsabbildung; damit gilt $U \in \Omega^0_\pi(TM)$. Weiter sei $C := \mathrm{d}^\nabla U \in \Omega^1_\pi(TM)$. Dann setze man für $k \in \{0, \ldots, r-1\}$

$$\Phi_k := (-1)^k \cdot \underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k} \curlywedge U \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k-1} \quad \in \Omega^{m-1}_\pi({\textstyle\bigwedge}^m TM) \tag{1}$$

Sind $\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}$ geeignet gewählte (unten angegebene) rationale Zahlen, so sei weiter:

$$\Phi := \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \Phi_k \quad \in \Omega^{m-1}_\pi({\textstyle\bigwedge}^m TM) \tag{2}$$

und schließlich

$$\Pi := \frac{1}{(2\pi)^r} \langle \pi^*\mathbf{E}, \Phi \rangle^{(m)} \quad \in \Omega^{m-1}(SM) \tag{3}$$

Um zu zeigen, daß diese Form tatsächlich eine Transgressionsform ist, definiert man zunächst für alle $k \in \{0, \ldots, r\}$

$$\Psi_k := (-1)^k \cdot \underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k} \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k} \quad \in \Omega^m_\pi({\textstyle\bigwedge}^m TM) \tag{4}$$

Dann folgt Eigenschaft (i) der Transgressionsform aus der Gleichung

$$\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi = -\frac{1}{r!}\Psi_r \tag{5}$$

Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi &\overset{(3)}{=} \mathrm{d}\left(\frac{1}{(2\pi)^r}\langle \pi^*\mathbf{E}, \Phi\rangle^{(m)}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^r}\,\mathrm{d}\Big(\langle \pi^*\mathbf{E}, \Phi\rangle^{(m)}\Big)
\end{aligned}$$

Weil das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle^{(m)}$ $\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}$-parallel ist, folgt:

$$\mathrm{d}\Pi = \frac{1}{(2\pi)^r}\left(\langle \mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\pi^*\mathbf{E}, \Phi\rangle^{(m)} + \langle \pi^*\mathbf{E}, \mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi\rangle^{(m)}\right)$$

Der erste Summand verschwindet, weil gilt: $\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\pi^*\mathbf{E} = \pi^*\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\mathbf{E}$ und $\mathbf{E}$ ein $\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}$-paralleles m-Vektorfeld ist. Also ergibt sich die Eigenschaft (i) der Transgressionsform:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi &= \frac{1}{(2\pi)^r}\langle \pi^*\mathbf{E}, \mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi\rangle^{(m)} \\
&\overset{(5)}{=} \frac{1}{(2\pi)^r}\langle \pi^*\mathbf{E}, -\frac{1}{r!}\Psi_r\rangle^{(m)} \\
&= -\frac{1}{r!(2\pi)^r}\langle \pi^*\mathbf{E}, \Psi_r\rangle^{(m)} \\
&\overset{(4)}{=} -\frac{1}{r!(2\pi)^r}\langle \pi^*\mathbf{E}, (-1)^r\underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega}_{r}\rangle^{(m)} \\
&= -\pi^*\left(\frac{(-1)^r}{r!(2\pi)^r}\langle \mathbf{E}, \underbrace{\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \Omega}_{r}\rangle^{(m)}\right) \\
&= -\pi^*\chi^M
\end{aligned} \tag{6}$$

$*\ *\ *$

Nun ist also (5) zu zeigen.

(5) ergibt sich aus den folgenden beiden Gleichungen:

$$\forall k \in \{0, \ldots, r-1\} \ :\ \mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi_k = \Psi_k - \frac{m-2k-1}{k+1}\Psi_{k+1} \tag{7}$$

$$\Psi_0 = 0 \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt (5):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi &\overset{(2)}{=} \mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\left(\sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k\Phi_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k \mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi_k \\
&\overset{(7)}{=} \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k\cdot\left(\Psi_k - \frac{m-2k-1}{k+1}\Psi_{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k\Psi_k - \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k\frac{m-2k-1}{k+1}\Psi_{k+1} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Sind nun die α_k so gewählt, daß gilt:

$$
\alpha_{k+1} = \alpha_k\cdot\frac{m-2k-1}{k+1} \qquad (10)
$$

so entsteht in (9) eine “Teleskopsumme”, die zu nur zwei Summanden “zusammenfällt”:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi &= \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k\Psi_k - \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_{k+1}\Psi_{k+1} \\
&= \alpha_0\Psi_0 - \alpha_r\Psi_r \\
&\overset{(8)}{=} -\alpha_r\Psi_r
\end{aligned}
$$

Verlangt man nun zuätzlich $\alpha_r = \frac{1}{r!}$, so erhält man

$$
\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi = -\frac{1}{r!}\Psi_r
$$

und damit die gewünschte Formel (5). Durch (10) und die Forderung $\alpha_r = \frac{1}{r!}$ sind die α_k eindeutig bestimmt, es gilt nämlich (wie man leicht durch “endliche Induktion” nachrechnet):

$$
\forall k\in\{0,\dots,r-1\}\ :\ \alpha_k = \frac{1}{k!\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-2k-1)} \qquad (11)
$$

* * *

Jetzt sind also die beiden Gleichungen (7) und (8) zu zeigen; ich beginne mit dem Beweis von (8).

Weil $U : SM \hookrightarrow TM$ ein globaler, nirgends verschwindender Schnitt im Vektorbündel $TM \to M$ längs der Fußpunktabbildung $\pi : SM \to M$ ist, wird durch $\eta := (\mathbb{R}U)^{\perp}$, das soll heißen:

$$\forall e \in SM \;:\; \eta_e := \left\{ w \in T_{\pi(e)}M \;\middle|\; \langle w, \underbrace{Ue}_{=e} \rangle = 0 \right\} \tag{12}$$

ein C^∞-Vektorbündel über SM der Faserdimension $(m-1)$ definiert.

Wegen der Definition von U gilt für die reellwertige Form $\langle U, U\rangle \in \Omega^0(SM)$: $\langle U, U\rangle = 1$ und daher $\mathrm{d}\langle U, U\rangle = 0$. Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezüglich d^∇ parallel ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathrm{d}^\nabla U, U\rangle + \langle U, \mathrm{d}^\nabla U\rangle \\ &= 2\langle \mathrm{d}^\nabla U, U\rangle \\ &= 2\langle C, U\rangle \end{aligned}$$

und somit: $\langle C, U\rangle = 0$. Daher gilt:

$$C \in \Omega^1(\eta) \tag{13}$$

Also ergibt sich:

$$\Psi_0 \overset{(4)}{=} \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m} \quad \in \Omega^m(\underset{=}{\textstyle\bigwedge^m \eta}) \tag{14}$$

Weil nun aber η ein Bündel der Faserdimension $m - 1 < m$ ist, ist $\forall e \in SM \;:\; (\bigwedge^m \eta)_e = \{0\}$ und daher folgt aus (14):

$$\Psi_0 = 0 \qquad ,$$

womit (8) gezeigt ist.

$* \; * \; *$

Verbleibt also (7) zu zeigen; dieser Beweis ist etwas aufwendiger. Als erstes definiere man:

$$\theta := (U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C) - \pi^*\Omega \quad \in \Omega^2_\pi(\bigwedge^2 TM) \tag{15}$$

Ich behaupte nun:

$$\theta \in \Omega^2(\bigwedge^2 \underset{=}{\eta}) \tag{16}$$

Beim Beweis von (16) benutze ich, daß für beliebige $V \in \Gamma_\pi(\bigwedge^2 TM)$ gilt:

$$V \in \Gamma(\bigwedge^2 \eta) \iff \forall W \in \Gamma(\eta) \; : \; \langle V, U \wedge W \rangle^{(2)} = 0 \tag{17}$$

Zu (17): Für jedes $e \in SM$ hat $(\bigwedge^2 \eta)_e$ die Dimension $\binom{m-1}{2}$ und damit in $\bigwedge^2 T_{\pi(e)}$ die Codimension $\binom{m}{2} - \binom{m-1}{2} = m - 1$. Andererseits gilt für $w, w_1, w_2 \in \eta_e$:

$$\begin{aligned}\langle w_1 \wedge w_2, e \wedge w \rangle^{(2)} &= \underbrace{\langle w_1, e \rangle}_{=0} \langle w_2, w \rangle - \langle w_1, w \rangle \underbrace{\langle w_2, e \rangle}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

Also ist $(\bigwedge^2 \eta)_e$ orthogonal zu dem $(m-1)$-dimensionalen Untervektorraum $\{e \wedge w \,|\, w \in \eta_e\}$ von $\bigwedge^2 T_{\pi(e)} M$. Wegen Dimensionsgleichheit ist also $(\bigwedge^2 \eta)_e$ genau das Orthokomplement von $\{e \wedge w \,|\, w \in \eta_e\}$ in $\bigwedge^2 T_{\pi(e)} M$, womit (17) gezeigt ist.

Um nun (16) zu beweisen, seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ beliebig vorgegeben; dann ist zu zeigen: $\theta(X,Y) \in \Gamma(\bigwedge^2 \eta)$. Dazu verwende ich (17): Sei $W \in \Gamma(\eta)$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned}Z &:= \langle \theta(X,Y), U \wedge W \rangle^{(2)} \\ &\overset{(15)}{=} \langle (U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C)(X,Y), U \wedge W \rangle^{(2)} - \langle \pi^*\Omega(X,Y), U \wedge W \rangle^{(2)}\end{aligned}$$

Da U eine 0-Form ist, ist $(U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C)(X,Y) = U \wedge \mathrm{d}^\nabla C(X,Y) = U \wedge \mathrm{d}^\nabla \mathrm{d}^\nabla U(X,Y)$ (dabei ist "$\wedge$" im Sinne des äußeren Produkts von Vektoren zu lesen) und daher:

$$Z = \langle U \wedge \mathrm{d}^\nabla \mathrm{d}^\nabla U(X,Y), U \wedge W \rangle^{(2)} - \langle \pi^*\Omega(X,Y), U \wedge W \rangle^{(2)}$$

Mit den Definitionen von $\langle \cdot, \cdot \rangle^{(2)}$ und von Ω ergibt sich:

$$\begin{aligned}Z &= \underbrace{\langle U, U \rangle}_{=1} \langle \mathrm{d}^\nabla \mathrm{d}^\nabla U(X,Y), W \rangle - \underbrace{\langle U, W \rangle}_{=0} \langle \mathrm{d}^\nabla \mathrm{d}^\nabla U(X,Y), U \rangle - \langle \pi^* R(X,Y) U, W \rangle \\ &= \langle \mathrm{d}^\nabla \mathrm{d}^\nabla U(X,Y), W \rangle - \langle \pi^* R(X,Y) U, W \rangle \\ &= \langle \mathrm{d}^\nabla \mathrm{d}^\nabla U(X,Y) - \pi^* R(X,Y) U, W \rangle\end{aligned}$$

($\langle U,U\rangle = 1$ folgt aus der Definition von SM; $\langle U,W\rangle = 0$ ergibt sich aus $W \in \Gamma(\eta)$.)

Wegen $\mathrm{d}^\nabla \mathrm{d}^\nabla U = \pi^* R \wedge U$, also $\mathrm{d}^\nabla \mathrm{d}^\nabla U(X,Y) = \pi^* R(X,Y)U$ ist $Z = 0$.

Mit (17) folgt $\theta(X,Y) \in \Gamma(\bigwedge^2 \eta)$ und damit $\theta \in \Omega^2(\bigwedge^2 \eta)$, womit (16) gezeigt ist.

$*$

Nun zeige ich:

$$\forall k \in \{1,\dots,r\} \ : \ \Psi_k = (-1)^k \cdot k \cdot (\underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \dots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k-1} \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \dots \curlywedge C}_{m-2k}) \tag{18}$$

Die beiden 2-Formen $\theta \in \Omega^2_\pi(SM, \bigwedge^2 TM)$ und $(U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C) \in \Omega^2_\pi(SM, \bigwedge^2 TM)$ kommutieren bzgl. $\curlywedge$ miteinander, denn nach der Vertauschungsregel für $\curlywedge$ gilt:

$$\theta \curlywedge (U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C) = (-1)^{2\cdot 2 + 2\cdot 2} \left((U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C) \curlywedge \theta\right) = (U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C) \curlywedge \theta$$

Daher kann man auf $\pi^*\Omega = U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C - \theta$ die "binomische Formel" anwenden, also gilt für $k \in \{0,\dots,r\}$:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \dots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k} &= \underbrace{(U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C - \theta) \curlywedge \dots \curlywedge (U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C - \theta)}_{k} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{i}{k} \underbrace{(U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C) \curlywedge \dots \curlywedge (U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C)}_{i} \curlywedge \underbrace{(-\theta) \curlywedge \dots \curlywedge (-\theta)}_{k-i}
\end{aligned} \tag{19}$$

Für $i \geq 2$ verschwindet der Summand in (19), denn dann gilt: $U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge \dots = -U \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge \dots = 0$ wegen $U \curlywedge U = 0$. Also ergibt sich aus (19):

$$\begin{aligned}
\underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \dots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k} &= \underbrace{(-\theta) \curlywedge \dots \curlywedge (-\theta)}_{k} + k \cdot (U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C) \curlywedge \underbrace{(-\theta) \curlywedge \dots \curlywedge (-\theta)}_{k-1} \\
&= (-1)^k \cdot \left(\underbrace{\theta \curlywedge \dots \curlywedge \theta}_{k} - k \cdot \underbrace{\theta \curlywedge \dots \curlywedge \theta}_{k-1} \curlywedge (U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C) \right)
\end{aligned} \tag{20}$$

(Die letzte Zeile ist gerechtfertigt, da $U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C$ und θ kommutieren.) Aus (20) ergibt sich für Ψ_k:

$$
\begin{aligned}
\Psi_k &\overset{(4)}{=} (-1)^k \cdot \underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k} \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k} \\
&\overset{(20)}{=} (-1)^k \cdot \left((-1)^k \left(\underbrace{\theta \curlywedge \ldots \curlywedge \theta}_{k} - k \cdot \underbrace{\theta \curlywedge \ldots \curlywedge \theta}_{k-1} \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \right) \right) \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k} \\
&= \underbrace{\theta \curlywedge \ldots \curlywedge \theta}_{k} \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k} - k \cdot \underbrace{\theta \curlywedge \ldots \curlywedge \theta}_{k-1} \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

(16) besagt $\theta \in \Omega^2(\bigwedge^2 \eta)$ und (13) besagt $C \in \Omega^1(\eta)$. Daher ist $\theta \curlywedge \ldots \curlywedge \theta \curlywedge C \curlywedge \ldots \curlywedge C \in \Omega^m(\bigwedge^m \eta)$. Weil η ein Vektorbündel der Dimension $m-1 < m$ ist, folgt $\theta \curlywedge \ldots \curlywedge \theta \curlywedge C \curlywedge \ldots \curlywedge C = 0$. Deshalb ergibt sich aus (21):

$$
\begin{aligned}
\Psi_k &= -k \cdot \theta \curlywedge \ldots \curlywedge \theta \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge C \curlywedge \ldots \curlywedge C \\
&\overset{(15)}{=} -k \cdot \underbrace{(U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C - \pi^*\Omega) \curlywedge \ldots \curlywedge (U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C - \pi^*\Omega)}_{(*)} \curlywedge \underbrace{U}_{(\dagger)} \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge C \curlywedge \ldots \curlywedge C \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Den in (22) mit "$(*)$" markierten Teil des Produkts kann man wegen der Multilinearität von $\curlywedge$ "ausmultiplizieren". Weil $U \curlywedge U = 0$ gilt (aus der Vertauschungsregel für $\curlywedge$ folgt $-(U \curlywedge U) = U \curlywedge U$), entfallen dabei alle Summanden, in denen U mindestens zweimal auftritt (inklusive des Auftretens bei $(\dagger)$). Also bleibt in (22) nach dem Ausmultiplizieren nur ein Summand übrig:

$$
\begin{aligned}
\Psi_k &= -k \cdot \underbrace{(-\pi^*\Omega) \curlywedge \ldots \curlywedge (-\pi^*\Omega)}_{k-1} \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k} \\
&= k \cdot (-1)^k \cdot \underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k-1} \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^\nabla C \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k}
\end{aligned}
$$

Damit ist (18) gezeigt.

$*$

Nach der Definition der Φ_k (Gleichung (1)) gilt:

$$
\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}} \Phi_k = (-1)^k \cdot \mathrm{d}^{\nabla^{(m)}} \left(\underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k} \curlywedge U \curlywedge \left(\underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k-1} \right) \right)
$$

Auf diese Gleichung wende ich die Produktregel für $\curlywedge$ an; dabei behandele ich $(C \curlywedge \ldots \curlywedge C)$ als einen Faktor. So ergibt sich:

$$\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi_k = (-1)^k \cdot \Bigg(\sum_{i=1}^{k} \underbrace{(-1)^{2(i-1)}}_{=1} \cdot \pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \overbrace{\mathrm{d}^{\nabla^{(2)}}\pi^*\Omega}^{i\text{-te Stelle}} \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega \curlywedge U \curlywedge (C \curlywedge \ldots \curlywedge C)$$

$$+ \underbrace{(-1)^{2k}}_{=1} \cdot \pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega \curlywedge \mathrm{d}^{\nabla}U \curlywedge (C \curlywedge \ldots \curlywedge C)$$

$$+ \underbrace{(-1)^{2k+0}}_{=1} \cdot \pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^{\nabla^{(m-2k-1)}}(C \curlywedge \ldots \curlywedge C) \Bigg) \tag{23}$$

Nach der Bianchi-Identität ist $\mathrm{d}^{\nabla^{(2)}}\pi^*\Omega = \pi^*\mathrm{d}^{\nabla^{(2)}}\Omega = 0$, deshalb entfällt in (23) der erste der drei Summanden in der Klammer. Weil $\mathrm{d}^{\nabla}U = C$ nach Definition ist, ist der zweite Summand, zusammen mit dem Vorfaktor $(-1)^k$, gleich Ψ_k nach (4). Daher erhält man aus (23):

$$\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi_k = \Psi_k \; + \; (-1)^k \cdot \underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k} \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^{\nabla^{(m-2k-1)}} \Bigg(\underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k-1} \Bigg) \tag{24}$$

Der Ausdruck $\mathrm{d}^{\nabla^{(m-2k-1)}}(C \curlywedge \ldots \curlywedge C)$ wird nun mit der Produktregel weiter bearbeitet; es gilt nämlich, wie man leicht durch vollständige Induktion beweist:

$$\forall \omega \in \Omega^1_\pi(TM)\ \forall p \in \mathbb{N}_+ \; : \; \mathrm{d}^{\nabla^{(p)}} \Bigg(\underbrace{\omega \curlywedge \ldots \curlywedge \omega}_{p} \Bigg) = p \cdot \Bigg(\mathrm{d}^{\nabla}\omega \curlywedge \underbrace{\omega \curlywedge \ldots \curlywedge \omega}_{p-1} \Bigg) \tag{25}$$

Mit (25) $(\omega = C, p = m-2k-1)$ ergibt sich aus (24):

$$\mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi_k = \Psi_k + (-1)^k \cdot (m-2k-1) \cdot \underbrace{\underbrace{\pi^*\Omega \curlywedge \ldots \curlywedge \pi^*\Omega}_{k} \curlywedge U \curlywedge \mathrm{d}^{\nabla}C \curlywedge \underbrace{C \curlywedge \ldots \curlywedge C}_{m-2k-2}}_{(*)} \tag{26}$$

Nach (18) gilt:

$$(*) = \frac{1}{(k+1)(-1)^{k+1}} \cdot \Psi_{k+1}$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in (26) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^{\nabla^{(m)}}\Phi_k &= \Psi_k + (-1)^k \cdot (m-2k-1) \cdot \frac{1}{(k+1)(-1)^{k+1}} \cdot \Psi_{k+1} \\ &= \Psi_k - \frac{m-2k-1}{k+1} \cdot \Psi_{k+1} \end{aligned}$$

Damit ist (7) gezeigt. Schon oben wurde aus (7) zusammen mit (8) die Gleichung (5) und daraus die Eigenschaft (i) der Transgressionsform für Π gefolgert.

$*\ *\ *$

Nun verbleibt also nur noch, nachzuweisen, daß Π auch die Eigenschaft (ii) aus der Definition der Transgressionsform erfüllt. Dazu sei $p \in M$ beliebig. Dann ist zu zeigen:

$$\lambda^{m-1}(S^{m-1}) \cdot \iota_p^* \Pi = \mathrm{vol}^{S_p M} \tag{27}$$

Dabei sei wie schon in Definition 3 $\pi : SM \to M$ das Einheitstangentialbündel von M und $\iota_p : S_pM \hookrightarrow SM$ die Inklusionsabbildung. Seien weiter $i : S_pM \hookrightarrow T_pM$ und $j_p : T_pM \hookrightarrow TM$ die jeweiligen Inklusionen. Dann gilt offenbar:

$$U \circ \iota_p = j_p \circ i \tag{28}$$

(dabei handelt es sich um die Inklusionsabbildung von S_pM nach TM) und die Abbildung

$$\pi \circ \iota_p : S_pM \to M \tag{29}$$

ist konstant gleich p.

Ist weiter $K^\nabla \in \Omega^1_\pi(TM)$ die Zusammenhangsform von (M, ∇), so gilt:

$$\begin{aligned} \iota_p^* C &= \iota_p^* \mathrm{d}^\nabla U \\ &= \iota_p^* U^* K^\nabla \\ &= (U \circ \iota_p)^* K^\nabla \\ &\overset{(28)}{=} (j_p \circ i)^* K^\nabla \\ &= i^* j_p^* K^\nabla \\ &= i^* \mathrm{d}^\nabla j_p \\ &= \mathrm{d}^\nabla j_p \circ i_* \end{aligned} \tag{30}$$

Außerdem gilt wegen der Konstanz von $\pi \circ \iota_p$:

$$\pi_* \circ (\iota_p)_* = (\pi \circ \iota_p)_* \equiv 0 \tag{31}$$

Zum Nachweis von (27) sei nun $e \in S_pM$ beliebig und sei $(b_1, \ldots, b_{m-1})$ eine beliebige positiv orientierte ONB von $T_e(S_pM)$; hierbei wird S_pM als orientierte, riemannsche Untermannigfaltigkeit des orientierten euklidischen Vektorraums T_pM aufgefasst (vermittels $i : S_pM \hookrightarrow T_pM$).

Da $(b_1, \ldots, b_{m-1})$ eine positiv orientierte ONB von $T_e(S_pM)$ ist, ist $(e, i_*b_1, \ldots, i_*b_{m-1})$ eine positiv orientierte ONB von T_pM. Daher gilt für den positiv orientierten m-Einheitsvektor $\mathbf{E}_p$ von T_pM:

$$\mathbf{E}_p = e \wedge i_*b_1 \wedge \ldots \wedge i_*b_{m-1} \tag{32}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\left(\iota_p^*\Pi\right)_e (b_1, \ldots, b_{m-1}) &\overset{(3)}{=} \iota_p^* \left(\frac{1}{(2\pi)^r} \langle \pi^*\mathbf{E}, \Phi \rangle^{(m)} \right)_e (b_1, \ldots, b_{m-1}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^r} \Bigg(\langle \underbrace{\iota_p^*\pi^*\mathbf{E}}_{=\underbrace{(\pi \circ \iota_p)}_{\equiv p}{}^*\mathbf{E} = \mathbf{E}_p}, \iota_p^*\Phi \rangle^{(m)} \Bigg)_e (b_1, \ldots, b_{m-1}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^r} \left(\langle \mathbf{E}_p, \iota_p^*\Phi \rangle^{(m)} \right)_e (b_1, \ldots, b_{m-1}) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{(2\pi)^r} \left(\langle \mathbf{E}_p, \iota_p^* \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \Phi_k \rangle^{(m)} \right)_e (b_1, \ldots, b_{m-1}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^r} \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \langle \mathbf{E}_p, \left(\iota_p^*\Phi_k\right)_e (b_1, \ldots, b_{m-1}) \rangle^{(m)}
\end{aligned}$$

Für $k \geq 1$ ist $\iota_p^*\Phi_k = 0$, denn dann ist $\Phi_k = \pi^*\Omega \curlywedge \ldots$, also $\iota_p^*\Phi_k = \iota_p^*\pi^*\Omega \curlywedge \ldots$ und wegen der Konstanz von $\pi \circ \iota_p$ ist $\pi_*(\iota_p)_* = 0$. Daher folgt:

$$
\begin{aligned}
\left(\iota_p^*\Pi\right)_e(b_1,\ldots,b_{m-1}) &= \frac{1}{(2\pi)^r}\cdot\alpha_0\langle \mathbf{E}_p, \left(\iota_p^*\Phi_0\right)_e(b_1,\ldots,b_{m-1})\rangle^{(m)} \\
&= \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\cdot\langle \mathbf{E}_p, (\Phi_0)_{\underbrace{\iota_p(e)}_{=e}}((\iota_p)_*b_1,\ldots,(\iota_p)_*b_{m-1})\rangle^{(m)} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\cdot\langle \mathbf{E}_p, (-1)^0\,(U\curlywedge\underbrace{C\curlywedge\ldots\curlywedge C}_{m-1})_e((\iota_p)_*b_1,\ldots,(\iota_p)_*b_{m-1})\rangle^{(m)} \\
&= \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\cdot\langle \mathbf{E}_p, \underbrace{U_e}_{=e}\wedge(C\curlywedge\ldots\curlywedge C)_e((\iota_p)_*b_1,\ldots,(\iota_p)_*b_{m-1})\rangle^{(m)} \\
&= \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\cdot\langle \mathbf{E}_p, e\wedge\frac{1}{1!\cdot\ldots\cdot 1!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m-1}}\left(\operatorname{sign}(\sigma)\cdot C_e((\iota_p)_*b_{\sigma(1)})\wedge\ldots\wedge C_e((\iota_p)_*b_{\sigma(m-1)})\right)\rangle^{(m)} \\
&= \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m-1}}\langle \mathbf{E}_p, \operatorname{sign}(\sigma)\cdot e\wedge C_e((\iota_p)_*b_{\sigma(1)})\wedge\ldots\wedge C_e((\iota_p)_*b_{\sigma(m-1)})\rangle^{(m)} \\
&= \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m-1}}\langle \mathbf{E}_p, e\wedge C_e((\iota_p)_*b_1)\wedge\ldots\wedge C_e((\iota_p)_*b_{m-1})\rangle^{(m)} \\
&= \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m-1}}\langle \mathbf{E}_p, e\wedge(\iota_p^*C)_e(b_1)\wedge\ldots\wedge(\iota_p^*C)_e(b_{m-1})\rangle^{(m)} \\
&\overset{(30)}{=} \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m-1}}\langle \mathbf{E}_p, e\wedge(\mathrm{d}^\nabla j_p)(i_*b_1)\wedge\ldots\wedge(\mathrm{d}^\nabla j_p)(i_*b_{m-1})\rangle^{(m)}
\end{aligned}
$$

$(e,(\mathrm{d}^\nabla j_p)(i_*b_1),\ldots,(\mathrm{d}^\nabla j_p)(i_*b_{m-1})) = (e,i_*b_1,\ldots,i_*b_{m-1})$ ist eine positiv orientierte ONB von T_pM, deshalb gilt $e\wedge(\mathrm{d}^\nabla j_p)(i_*b_1)\wedge\ldots\wedge(\mathrm{d}^\nabla j_p)(i_*b_{m-1}) = \mathbf{E}_p$. Daher ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\left(\iota_p^*\Pi\right)_e(b_1,\ldots,b_{m-1}) &= \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m-1}}\langle \mathbf{E}_p,\mathbf{E}_p\rangle^{(m)} \\
&= \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m-1}} 1 \\
&= \frac{\alpha_0}{(2\pi)^r}\cdot\underbrace{\#\mathfrak{S}_{m-1}}_{=(m-1)!} \\
&\overset{(11)}{=} \frac{(\overbrace{m}^{=2r}-1)!}{(2\pi)^r\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)} \\
&= \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2(r-1)}{(2\pi)^r} = \frac{2^{r-1}\cdot(r-1)!}{(2\pi)^r} = \frac{(r-1)!}{2\cdot\pi^r} \\
&\overset{\text{Bsp. 1}}{=} \frac{1}{\lambda^{m-1}(S^{m-1})} \\
&= \frac{1}{\lambda^{m-1}(S^{m-1})}\cdot\mathrm{vol}^{S_pM}(b_1,\ldots,b_{m-1})
\end{aligned}
$$

Da die ONB $(b_1,\ldots,b_{m-1})$ beliebig war, folgt hieraus die Gleichung (27). Also erfüllt Π auch Eigenschaft (ii) aus Definition 3. Wegen der Gleichungen (6) und (27) ist Π also eine Transgressionsform für χ^M auf π, q. e. d.

4 Hilfsmittel

Um den Beweis des Satzes von Gauß/Bonnet fortzusetzen, benötigt man einige Sätze, die ich hier ohne Beweis angebe.

Satz 2 (aus der algebraischen Topologie)
Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit; also besitzt M nur endlich viele Zusammenhangskomponenten $M_1, \ldots, M_n$, diese sind kompakt und tragen wieder die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Dann gilt für die Euler-Charakteristik $X(M)$ von M:

$$X(M) = \sum_{i=1}^{n} X(M_i)$$

Satz 3 (Integralsatz von Kronecker)
Seien M und N kompakte, zusammenhängende, orientierte C^∞-Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und $f : M \to N$ eine C^∞-Abbildung. Dann gilt für den Brouwerschen Abbildungsgrad $\deg(f)$ von f:

$$\forall \omega \in \Omega^n(N) \ : \ \int_M f^*\omega = \deg(f) \cdot \int_N \omega$$

Satz 4 (Satz von Hopf)
Sei M eine zusammenhängende C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein $q \in M$ und ein stetiges Einheitsvektorfeld $X : M\backslash\{q\} \to SM$ (längs der Inklusion $M\backslash\{q\} \hookrightarrow M$) und für ein jedes solches gilt:

$$\mathrm{ind}(X, q) = X(M)$$

Satz 5 (Approximationssatz von Steenrod)
Es seien M und B C^∞-Mannigfaltigkeiten, $\pi : M \to B$ ein C^∞-Faserraum, $\sigma : B \to M$ ein stetiger Schnitt in π, $A \subset B$ abgeschlossen und $G \subset B$ offen. Es gelte $A \subset G$ und $\sigma|G$ sei C^∞-differenzierbar. Dann existiert ein C^∞-Schnitt $\tilde{\sigma} : B \to M$ von π mit $\tilde{\sigma}|A = \sigma|A$. Der Fall $A = G = \emptyset$ ist zugelassen.

5 Der Beweis des Satzes von Gauß/Bonnet

Dieser Abschnitt, in dem der weitere Beweis des Satzes von Gauß/Bonnet skizziert werden soll, basiert auf dem Seminarvortrag von Marius Schaper.

Es gelten die Generalvoraussetzungen des Abschnitts 2. Außerdem sei M kompakt, $\pi_M : TM \to M$ das Tangentialbündel von M und $\pi : SM \to M$ das Einheitssphärenbündel von M. χ^M sei der Gauß/Bonnet-Integrand von M und Π dessen Transgressionsform gemäß dem Lemma-Theorem.

Wegen Satz 2 kann M ohne Beschränkung der Allgemeinheit als zusammenhängend gewählt werden.

Nach dem Satz von Hopf gibt es ein $q \in M$ und dazu ein stetiges Einheitsvektorfeld $X : M\backslash\{q\} \to SM$ längs der Inklusion $M\backslash\{q\} \hookrightarrow M$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann X als C^∞-Vektorfeld angenommen werden.

Warum? Die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{X} : M\backslash\{q\} &\to S(M\backslash\{q\}) = SM\backslash S_qM \\ p &\mapsto X_p \end{aligned}$$

ist ein Element von $\mathfrak{X}(M\backslash\{q\})$, und daher ein stetiger Schnitt des Faserbündels $S(M\backslash\{q\}) \to M\backslash\{q\}$. Mit dem Approximationssatz von Steenrod, angewandt in der Situation $A = G = \emptyset$, erhält man einen C^∞-Schnitt $\tilde{X} : M\backslash\{q\} \to S(M\backslash\{q\})$. Da $S(M\backslash\{q\})$ offen in SM ist, ist auch $X' : M\backslash\{q\} \to SM, p \mapsto \tilde{X}_p$ eine C^∞-Abbildung, die an die Stelle des ursprünglichen Vektorfelds X treten kann.

Sei $\exp := \exp_q^\nabla : D_q \to M$ (D_q in T_qM offen) die von ∇ in q induzierte Exponentialabbildung. Dann definiere für alle $\epsilon \in]0, \rho]$:

$$\begin{aligned} B_\epsilon &:= \left\{ v \in T_qM \,\middle|\, \langle v, v\rangle < \epsilon^2 \right\}, & B_\epsilon^M &:= \exp(B_\epsilon) \\ D_\epsilon &:= \left\{ v \in T_qM \,\middle|\, \langle v, v\rangle \le \epsilon^2 \right\}, & D_\epsilon^M &:= \exp(D_\epsilon) \\ S_\epsilon &:= \left\{ v \in T_qM \,\middle|\, \langle v, v\rangle = \epsilon^2 \right\}, & S_\epsilon^M &:= \exp(S_\epsilon) \end{aligned}$$

Dabei sei $\rho \in \mathbb{R}_+$ so gewählt, daß $B_\rho \subset D_q$ gilt und $\exp|B_\rho : B_\rho \to B_\rho^M$ ein Diffeomorphismus ist. Sei weiter für alle $v \in T_qM$ γ_v die (maximale) Geodätische mit $\gamma_v(0) = q$ und $\dot{\gamma_v}(0) = v$. (Also gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $tv \in D_q$: $\gamma_v(t) = \exp(tv)$.)

Aussage 1
Sei $N := S_qM \dot{\cup} (M\backslash\{q\})$. Für N existiert in kanonischer Weise eine C^∞-Struktur, mit der N zu einer m-dimensionalen, kompakten, berandeten C^∞-Mannigfaltigkeit wird. Es gilt $\partial N = S_qM$.

Warum? Man benutzt das Theorem über die Konstruktion von C^∞-Strukturen auf Mengen (Satz aus 8.11); dieses gilt analog auch für berandete Mannigfaltigkeiten. Dazu setze $S := [0, \rho[\times S_qM$ (dies ist offensichtlich eine berandete Mannigfaltigkeit mit $\partial S = \{0\} \times S_qM$) und

$$\begin{aligned} \Psi : S &\to S_qM \dot{\cup} B_\rho^M\backslash\{q\} \subset N \\ (t, v) &\mapsto \begin{cases} \exp(tv) & \text{für } t \neq 0 \\ v & \text{für } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ψ und $\mathrm{id}_{M\backslash\{q\}}$ sind Bijektionen von (berandeten) C^∞-Mannigfaltigkeiten auf Teilmengen von N, die N ganz überdecken, und die "Kartenwechsel" zwischen diesen beiden Abbildungen sind offenbar C^∞-Abbildungen. Nach dem Theorem wird N daher zunächst zu einer berandeten, topologischen Mannigfaltigkeit. Weil M kompakt ist, ist auch diese kompakt, also insbesondere parakompakt. Deshalb kann N sogar mir der Struktur einer C^∞-Mannigfaltigkeit versehen werden, so daß Ψ und $\mathrm{id}_{M\backslash\{q\}}$ zu C^∞-Diffeomorphismen werden. Die Aussage $\partial N = S_qM$ beweist man leicht mit Kartenbetrachtungen.

Aussage 2
Es existiert eine Orientierung $\mathcal{O}^N$ auf N derart, daß die zugehörige Stokes-Randorientierung $\partial\mathcal{O}^N$ von $\partial N = S_qM$ zur von $\mathcal{O}^M$ auf S_qM induzierten Orientierung $\mathcal{O}^{S_qM}$ entgegengesetzt ist. Weiterhin ist die Abbildung

$$\sigma : N \to M, \quad p \mapsto \begin{cases} p & \text{falls} \quad p \in M\backslash\{q\} \\ q & \text{falls} \quad p \in S_qM \end{cases}$$

eine C^∞-Abbildung und

$$\sigma|(N\backslash S_qM) : \big(N\backslash S_qM, \mathcal{O}^N|(N\backslash S_qM)\big) \to \big(M\backslash\{q\}, \mathcal{O}^M|(M\backslash\{q\})\big) \tag{33}$$

ist ein orientierungstreuer C^∞-Diffeomorphismus.

Warum? Man zeigt zunächst, daß auf $S := [0,\rho[\times S_qM$ eine Orientierung definiert werden kann, so daß die davon induzierte Randorientierung $\mathcal{O}^{\partial S}$ die Gleichung $\mathcal{O}^{\partial S} = -\mathcal{O}^{S_qM}$ erfüllt; hierbei wird $\partial S = \{0\} \times S_qM$ mit S_qM identifiziert. Dann überträgt man diese Situation auf N; dabei ist der wesentliche Hintergrund, daß die Abbildung $\Psi|S^o$ (mit dem Ψ aus dem Beweis von Aussage 1) bezüglich $\mathcal{O}^S$ und $\mathcal{O}^M$ orientierungserhaltend ist und daß sich deshalb die Orientierungen $\mathcal{O}^M$ und $(\Psi^{-1})^*\mathcal{O}^S$ zu einer Orientierung auf ganz N zusammensetzen.

Nun definiere zu X für jedes $\epsilon \in]0,\rho[$ ein Vektorfeld $X_\epsilon : N \to SM$ durch:

$$\forall p \in N \ : \ X_\epsilon(p) := \begin{cases} X(p) & \text{für} \quad p \in M\backslash B_\epsilon^M \\ \left(\overset{t}{\underset{\epsilon}{\|}}\gamma_v\right)(X(\gamma_v(\epsilon))) & \text{für} \quad p = \gamma_v(t) \in D_\epsilon^M\backslash\{q\}, t \in]0,\epsilon[\\ \left(\overset{0}{\underset{\epsilon}{\|}}\gamma_v\right)(X(\gamma_v(\epsilon))) & \text{für} \quad p = v \in S_qM \end{cases}$$

Aussage 3
Für jedes $\epsilon \in]0,\rho[$ ist $X_\epsilon : N \to SM$ ein stetiges Einheitsvektorfeld längs der Abbildung σ (aus Aussage 2). Weil wir oben X als C^∞-Vektorfeld angenommen haben, ist auch $X_\epsilon|((B_\epsilon^M\backslash\{q\})\dot\cup S_qM)$ ein C^∞-Vektorfeld.

Warum? Weil ∇ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ metrisch ist, bildet X_ϵ tatsächlich nach SM ab. Die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsaussagen folgen aus dem Theorem über die stetige bzw. differenzierbare Abhängigkeit der Parallelverschiebung von den Anfangsdaten.

Definition 4
Sei $\epsilon \in]0,\rho[$. Dann erhält man aus X_ϵ eine stetige Abbildung

$$f_\epsilon : S_qM \to S_qM, \quad v \mapsto X_\epsilon(v) \qquad .$$

Daher kann der *"ϵ"-Index von X in q* durch

$$\mathrm{ind}^\epsilon(X,q) := \deg f_\epsilon$$

definiert werden.

Am Ende des Beweises wird sich herausstellen, daß der “ϵ”-Index tatsächlich von ϵ unabhängig ist. Man spricht daher normalerweise einfach vom Index von X in q.

Sei nun $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $2\epsilon < \rho$. Dann läßt sich aus $X_{2\epsilon}$ ein C^∞-Vektorfeld $E : N \to SM$ mit der Eigenschaft

$$\tilde{\jmath}^* \chi^M = -(E \circ j)^* \mathrm{d}\Pi \tag{34}$$

konstruieren. Dabei werden die Inklusionen j und $\tilde{\jmath}$, ebenso wie i und $\tilde{\imath}$ durch das folgende Diagramm definiert, dessen unteres “Viereck” kommutiert (das obere “Dreieck” jedoch *nicht*):

$$\begin{tikzcd}
S_qM \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, hook, "\tilde{\imath}"] & \\
N \arrow[r, "E"] & SM \arrow[d, "\pi"] \\
M\backslash\{q\} \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r, hook, "\tilde{\jmath}"'] & M
\end{tikzcd}$$

<u>Warum?</u> Nach Aussage 3 ist $X_{2\epsilon}$ stetig und $X_{2\epsilon}|((D_\epsilon^M\backslash\{q\})\dot\cup S_qM)$ eine C^∞-Abbildung (wegen $(D_\epsilon^M\backslash\{q\})\dot\cup S_qM \subset (B_{2\epsilon}^M\backslash\{q\})\dot\cup S_qM$). Also ist

$$\tilde{X} := X_{2\epsilon}|M\backslash\{q\} : M\backslash\{q\} \to S(M\backslash\{q\})$$

ein stetiger Schnitt im Tangentialbündel von $M\backslash\{q\}$, so daß $\tilde{X}|B_{2\epsilon}^M\backslash\{q\}$ C^∞-differenzierbar ist.

Durch Anwendung des Satzes von Steenrod auf $\tilde{X}$ mit $G := B_{2\epsilon}^M\backslash\{q\}$ und $A := D_\epsilon^M\backslash\{q\}$ (G ist offen, A abgeschlossen in $M\backslash\{q\}$) ergibt sich die Existenz eines C^∞-Schnittes

$$\tilde{E} : M\backslash\{q\} \to S(M\backslash\{q\})$$

der auf $D_\epsilon^M\backslash\{q\}$ mit $\tilde{X}$ übereinstimmt.

$\tilde{E}$ läßt sich auf ganz N differenzierbar fortsetzen durch

$$\begin{aligned} E : N &\to SM \\ p &\mapsto \begin{cases} \tilde{E}_p & \text{für } p \in M\backslash\{q\} \\ X_{2\epsilon}(p) & \text{für } p \in S_qM \end{cases} \end{aligned}$$

Zu (34): Es gilt: $\tilde{j}^*\chi^M = (\pi \circ E \circ j)^*\chi^M = (E \circ j)^*\pi^*\chi^M = -(E \circ j)^*\mathrm{d}\Pi$ wegen der Kommutativität der unteren Hälfte des Diagramms und wegen Eigenschaft (i) der Transgressionsform Π von χ^M.

Nun endlich kann $\int_M^{\mathcal{O}^M} \chi^M$ ausgerechnet werden: Da $\{q\}$ bzgl. dem Volumenmaß eine Nullmenge ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\int_M^{\mathcal{O}^M} \chi^M &= \int_{M\setminus\{q\}}^{\mathcal{O}^M} \tilde{j}^*\chi^M \\
&\overset{(34)}{=} -\int_{M\setminus\{q\}}^{\mathcal{O}^M} (E \circ j)^*\mathrm{d}\Pi \\
&\overset{(33)}{=} -\int_{N\setminus S_qM}^{\mathcal{O}^N} \sigma^*(E \circ j)^*\mathrm{d}\Pi \\
&= -\int_{N\setminus S_qM}^{\mathcal{O}^N} (E \circ j)^*\mathrm{d}\Pi \\
&= -\int_{N\setminus S_qM}^{\mathcal{O}^N} j^*\mathrm{d}(E^*\Pi)
\end{aligned}$$

Da auch S_qM (in N) eine Nullmenge ist, erhält man weiter:

$$\int_M^{\mathcal{O}^M} \chi^M = -\int_N^{\mathcal{O}^N} \mathrm{d}(E^*\Pi)$$

Mit dem Satz von Stokes und Aussage 2, die besagt, daß die Randorientierung $\partial\mathcal{O}^N$ zur kanonischen Orientierung von S_qM entgegengesetzt ist, erhält man hieraus:

$$\begin{aligned}
\int_M^{\mathcal{O}^M} \chi^M &\overset{\text{Stokes}}{=} -\int_{\partial N}^{\partial\mathcal{O}^N} i^*E^*\Pi \\
&\overset{\text{Auss. 2}}{=} \int_{S_qM}^{\mathcal{O}^{S_qM}} i^*E^*\Pi \\
&= \int_{S_qM}^{\mathcal{O}^{S_qM}} (E \circ i)^*\Pi
\end{aligned} \tag{35}$$

$E \circ i$ bildet nach $S_qM \subset SM$ ab. Daher ist wohldefiniert:

$$\begin{aligned}
\hat{E} : S_qM &\to S_qM \\
v &\mapsto E \circ i(v)
\end{aligned}$$

und offenbar gilt $E \circ i = \tilde{\imath} \circ \hat{E}$. Setzt man diese Beziehung in (35) ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\int_M^{\mathcal{O}^M} \chi^M &= \int_{S_qM}^{\mathcal{O}^{S_qM}} (\tilde{\iota} \circ \hat{E})^* \Pi \\
&= \int_{S_qM}^{\mathcal{O}^{S_qM}} \hat{E}^* (\tilde{\iota}^* \Pi)
\end{aligned} \tag{36}
$$

Nach Eigenschaft (ii) aus der Definition der Transgressionsform gilt:

$$
\iota^* \Pi = \frac{1}{\lambda^{m-1}(S^{m-1})} \mathrm{vol}^{S_qM}
$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in (36) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\int_M^{\mathcal{O}^M} \chi^M &= \int_{S_qM}^{\mathcal{O}^{S_qM}} \hat{E}^* \left(\frac{1}{\lambda^{m-1}(S^{m-1})} \mathrm{vol}^{S_qM} \right) \\
&= \frac{\int_{S_qM}^{\mathcal{O}^{S_qM}} \hat{E}^* \left(\mathrm{vol}^{S_qM} \right)}{\int_{S_qM}^{\mathcal{O}^{S_qM}} \mathrm{vol}^{S_qM}}
\end{aligned}
$$

Nach dem Integralsatz von Kronecker ist der rechtsstehende Ausdruck aber gerade der Abbildungsgrad von $\hat{E}$. Dieser entspricht nach Definition 4 dem "ϵ"-Index von $E|(M \backslash \{q\})$ in q. In Formeln:

$$
\int_M^{\mathcal{O}^M} \chi^M = \deg(\hat{E}) = \mathrm{ind}^{\epsilon}(E|(M \backslash \{q\}), q)
$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar von ϵ unabhängig. Deshalb ist der "ϵ"-Index in Wirklichkeit ebenfalls von ϵ unabhängig und gleich dem Index im Sinne des Satzes von Hopf. Mit dessen Hilfe erhält man also endlich:

$$
\int_M^{\mathcal{O}^M} \chi^M = \mathrm{ind}(E|(M \backslash \{q\}), q) \overset{\text{Hopf}}{=} X(M)
$$

q. e. d.