05.02.97 Sebastian Klein
sklein@mi.uni-koeln.de

Morse-Smale-Diffeomorphismen des Kreises

Definition 1
Eine Abbildung $f: S^1 \longrightarrow S^1$ heißt **stetig differenzierbar** (oder C^1), wenn $f \circ \pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ ein C^1-Weg in $\mathbb{R}^2$ ist. In diesem Falle ist $f' : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f' \circ \pi = F'$ für einen Lift F von f. Die Funktion f heißt (C^1-)**Diffeomorphismus** auf S^1, wenn sie zusätzlich bijektiv ist und die Umkehrfunktion $\check{f}: S^1 \longrightarrow S^1$ von f ebenfalls C^1 ist.

Definition 2
Ein Diffeomorphismus $f : S^1 \longrightarrow S^1$ heißt **orientierungserhaltend**, wenn für alle $\theta \in S^1$ gilt: $f'(\theta) > 0$. Das bedeutet, daß f die Anordnung der Punkte aus S^1 erhält.

Definition 3 (Morse-Smale-Diffeomorphismus)
Ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus $f: S^1 \longrightarrow S^1$ heißt **Morse-Smale-Diffeomorphismus**, wenn gilt:

(i) f besitzt periodische Punkte ($\Leftrightarrow \rho(f) \in \mathbb{Q}$)

(ii) Alle periodischen Punkte von f sind hyperbolisch, d.h. für alle periodischen Punkte p gilt $|f'(p)| \neq 1$.

Beispiel 1
Sei $f : S^1 \longrightarrow S^1$ definiert durch $f(\theta) := \theta + \frac{\pi}{n} + \epsilon \sin(2n\theta)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann ist für hinreichend kleine ϵ die Abbildung f ein Morse-Smale-Diffeomorphismus.

Aussage 1
Ist für einen Diffeomorphismus $f : S^1 \longrightarrow S^1$ die Rotationszahl $\rho(f) = \frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{N}$), so haben alle periodischen Punkte von f die Periode q.

Definition 4 (Strukturelle Stabilität)
Eine Funktion $f: S^1 \longrightarrow S^1$ heißt C^r**-strukturell-stabil** ($r \in \mathbb{N}$), wenn ein $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert, so daß jede C^r-Funktion $g: S^1 \longrightarrow S^1$ mit $\|f - g\|^{(r)} < \epsilon$ zu f topologisch konjugiert ist.

Satz 1
Jeder Morse-Smale-Diffeomorphismus des S^1 ist C^1-strukturell-stabil.

Definition 5
Sei $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$. Dann heißt ein $\theta \in S^1$ **wiederkehrend unter** f, wenn gilt:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \, \exists n \in \mathbb{N}\colon f^n(\theta) \in U_\epsilon(\theta)$$

wenn also der Orbit von θ unter f in θ einen Häufungspunkt hat. Natürlich ist jeder periodische Punkt von f auch wiederkehrend unter f.

Aussage 2
Jeder Diffeomorphismus $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ besitzt einen wiederkehrenden Punkt.

Satz 2 (Das Closing-Lemma für S^1)
Sei $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ ein Diffeomorphismus, der keine periodische Punkte besitzt. Dann existiert für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ ein Diffeomorphismus $g_\epsilon : S^1 \longrightarrow S^1$ mit $\|f - g_\epsilon\|^{(r)} < \epsilon$, der periodische Punkte besitzt.

Theorem 1 (Kupka-Smale-Theorem für S^1)
Sei f ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus auf S^1. Dann existiert für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ ein C^1-Morse-Smale-Diffeomorphismus g mit $\|f-g\|^{(1)} < \epsilon$.

Beim Beweis des Kupka-Smale-Theorems können wir nach dem Closing-Lemma voraussetzen, daß f periodische Punkte besitzt. Dann wird f so modifiziert, daß alle "problematischen" Punkte beseitigt werden, man jedoch C^1-ϵ-nahe bei f bleibt. Als "Probleme" können auftreten:

1. Intervalle von periodischen Punkten von f. (Im Inneren eines solchen Intervalls wäre $f' = 1$, die periodischen Punkte also nicht-hyperbolisch, was nicht sein darf.)

2. Häufungspunkte der Menge der periodischen Punkte. (Im Häufungspunkt wäre ebenfalls $f' = 1$.)

3. Sonstige (isolierte) nicht-hyperbolische Fixpunkte.

Jedes der drei folgenden Lemmata befasst sich mit der Beseitigung eines dieser “Probleme”. Hierbei genügt es, sich auf Fixpunkte zu beschränken.

Lemma 1
Sei $f : S^1 \longrightarrow S^1$ ein orientierungserhaltender C^r-Diffeomorphismus, der $f(\theta) = \theta$ erfüllt für alle $\theta \in I := [\theta_0 - 2\pi\delta, \theta_0 + 2\pi\delta]$ (mit $\theta_0 \in S^1$, $\delta \in \mathbb{R}_+$). Dann existiert für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ ein Diffeomorphismus g, der C^r-ϵ-nahe bei f liegt und für den gilt:

1. $g(\theta) = f(\theta)$ für alle $\theta \notin I^o$
2. $g(\theta_0) = f(\theta_0)$
3. $g(\theta) \neq \theta$ für alle $\theta \in I^o \setminus \{\theta_0\}$.

Also besitzt die Funktion g auf I^o genau einen Fixpunkt, nämlich in θ_0.

Lemma 2
Sei $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ ein orientierungserhaltender C^1-Diffeomorphismus, der nur Fixpunkte besitzt. Dann existiert zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ ein C^1-Diffeomorphismus, der C^1-ϵ-nahe bei f liegt und der nur isolierte Fixpunkte besitzt.

Lemma 3
Sei $f : S^1 \longrightarrow S^1$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, der nur isolierte periodische Punkte besitzt. Dann existert (zu $\epsilon \in \mathbb{R}_+$) ein Diffeomorphismus g, der C^r-ϵ-nahe bei f liegt und der nur hyperbolische periodische Punkte besitzt. Die Abbildung g ist also ein Morse-Smale-Diffeomorphismus.