20.11.2000 Sebastian Klein <sklein@mi.uni-koeln.de>

Riemannsche Flächen

Definition 1 (Karte, Atlas, Riemannsche Fläche)
Sei X ein zusammenhängender Hausdorffraum.

(a) Ist φ ein Homöomorphismus von einer offenen Menge $U \subset X$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{C}$, so heißt (U, φ) eine *Karte von* X.

(b) Zwei Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) von X heißen *verträglich* oder *(biholomorph) äquivalent*, wenn die Abbildung

$$\varphi_2 \circ (\varphi_1 | U_1 \cap U_2)^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

(die als *Kartenwechsel* von (U_1, φ_1) nach (U_2, φ_2) bezeichnet wird) biholomorph ist.

(c) Eine Familie $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von verträglichen Karten von X, so daß $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist, heißt ein *Atlas auf* X.

(d) Zwei Atlanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ auf X heißen *verträglich* oder *äquivalent*, wenn auch $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ ein Atlas auf X ist. Dadurch wird tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Atlanten von X definiert.

(e) Ist $[\mathfrak{A}]$ eine Äquivalenzklasse von Atlanten auf X, so heißt das Paar $(X, [\mathfrak{A}])$ eine *Riemannsche Fläche*. Wenn Mißverständnisse über die gemeinte Äquivalenzklasse ausgeschlossen sind, nennt man auch einfach X eine Riemannsche Fläche und die Elemente von $[\mathfrak{A}]$ *die Atlanten von* X. Mit einer Karte von X ist in diesem Sprachgebrauch stets eine Karte gemeint, die zu einem Atlas aus $[\mathfrak{A}]$ gehört.

Beispiele.

(a) Jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ wird auf kanonische Weise, nämlich mit dem Atlas $\{(G, \mathrm{id}_G)\}$, zu einer Riemannschen Fläche.

(b) $\{(\mathbb{C}, z \mapsto \overline{z})\}$ ist ein Atlas auf $\mathbb{C}$, der mit dem kanonischen Atlas nicht verträglich ist.

(c) Als *Gebiet* einer Riemannschen Fläche X bezeichnet man eine offene, zusammenhängende Teilmenge G von X. Durch Beschränkung der Karten wird G selbst eine Riemannsche Fläche.

(d) $\Sigma := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird mit dem Atlas $\{(\mathbb{C}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}), (\Sigma \backslash \{0\}, z \mapsto \frac{1}{z})\}$ zu einer Riemannschen Fläche, die man als die *Riemannsche Zahlensphäre* bezeichnet. Sie ist homöomorph zu S^2 und daher kompakt.

(e) Die Menge $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ aller komplex-eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{C}^2$ läßt sich durch die Bijektion

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \Sigma$$
$$[(z_1, z_2)] \mapsto \begin{cases} z_2/z_1 & \text{für } z_1 \neq 0 \\ \infty & \text{für } z_1 = 0 \end{cases}$$

mit Σ identifizieren. Auf diese Weise wird $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ zu einer kompakten, zu S^2 homöomorphen, Riemannschen Fläche. Man bezeichnet $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — versehen mit dieser Struktur — als den *eindimensionalen komplex-projektiven Raum*.

(f) Eine Riemannsche Fläche im Sinne von Übungsaufgabe 40 (d.h. ein zusammenhängender Hausdorffraum X, der mit einem lokalen Homöomorphismus $\pi : X \to \mathbb{C}$ versehen ist) ist auch eine Riemannsche Fläche im Sinne obiger Definition.

(g) Sei $\Gamma \neq \{0\}$ eine diskrete, additive Untergruppe von $\mathbb{C}$. Dann wird auf dem Quotientenraum $\mathbb{C}/\Gamma := \{z + \Gamma | z \in \mathbb{C}\}$ durch die kanonische Projektion

$$\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma, z \mapsto z + \Gamma$$

die Struktur einer Riemannschen Fläche erzeugt.

Bezüglich der Struktur von Γ können nur zwei verschiedene Fälle auftreten:

1. $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot \omega_0$ mit $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$. In diesem Fall hat $\mathbb{C}/\Gamma$ die Struktur eines (flachen) *Zylinders*.
2. $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot \omega_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot \omega_2$, wobei $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ $\mathbb{R}$-linear-unabhängig sind. In diesem Falle nennt man Γ ein *Gitter* und $\mathbb{C}/\Gamma$ hat die Struktur eines (flachen) *Torus*; dieser ist kompakt.

(h) Die Zusammenhangskomponenten der Garbe $\mathcal{O}$ der Holomorphie sind Riemannsche Flächen.

Definition 2 (Holomorphie)
Es seien zwei Riemannsche Flächen X, Y, eine Abbildung $f : X \to Y$ und ein Punkt $p \in X$ gegeben.

(a) f heißt *holomorph in* p, wenn für jede Karte (U, φ) von X mit $p \in U$ und für jede Karte (V, ψ) von Y mit $f(p) \in V$ die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

(die auf einer Umgebung von $\varphi(p)$ definiert ist) in $\varphi(p)$ holomorph ist.

(b) f heißt *holomorph*, wenn f in jedem Punkt von X holomorph ist. Die Menge der holomorphen Funktionen $f : X \to Y$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(X, Y)$.

(c) Wir setzen $\mathcal{O}(X) := \mathcal{O}(X, \mathbb{C})$ (diese Abbildungen heißen *holomorphe Funktionen*) und $\mathcal{M}(X) := \mathcal{O}(X, \Sigma) \backslash \{z \mapsto \infty\}$ (*meromorphe Funktionen*).

(d) Ist f bijektiv und holomorph, und ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls holomorph, so heißt f *biholomorph*. Gibt es zwischen den Riemannschen Flächen X und Y eine biholomorphe Abbildung, so heißen X und Y *biholomorph äquivalent* oder *isomorph*.

Man beachte, daß damit noch nicht gesagt ist, was die "Ableitung" einer holomorphen Funktion oder Abbildung sein soll.

Viele aus der Funktionentheorie I bekannte Sätze lassen sich auf Riemannsche Flächen verallgemeinern, indem man die entsprechenden Aussagen mit Hilfe von Kartenbetrachtungen auf die klassischen Aussagen für Gebiete in $\mathbb{C}$ zurückführt.

Einige Beispiele:

Satz 1 (Identitätssatz)
Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f, g : X \to Y$ zwei holomorphe Abbildungen. Ist die Menge $N := \{p \in X | f(p) = g(p)\}$ nicht diskret in X, so folgt schon $f = g$.

Satz 2 (Satz von der Gebietstreue)
Sind X, Y Riemannsche Flächen und ist $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung, so ist f entweder konstant oder offen (d.h. bildet offene Mengen von X auf offene Mengen von Y ab).

Satz 3 (Maximumsprinzip)
Ist X eine Riemannsche Fläche und $f : X \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so ist entweder f konstant, oder $|f|$ besitzt keine lokalen Maxima auf X.

Sehr viel tiefliegender ist hingegen:

Satz 4 (Weierstraßscher Produktsatz/Satz von Mittag-Leffler)
Sei X eine *nicht-kompakte* Riemannsche Fläche. Dann existiert zu jeder diskreten Nullstellen- und Hauptteilverteilung auf X eine meromorphe (bzw. holomorphe) Funktion auf X, die diese Verteilung realisiert.

(Zum Beweis vergleiche man beispielsweise O. Forster, Riemannsche Flächen, Berlin 1977.)

Anwendungen und Beispiele.

(a) Ist K eine *kompakte* Riemannsche Fläche, so besteht $\mathcal{O}(K)$ nur aus den konstanten Funktionen.

(b) Ist $G \subset \Sigma$ ein Gebiet, so sind die Elemente von $\mathcal{M}(G)$ gerade die meromorphen Funktionen im "alten" Sinne. Insbesondere besteht $\mathcal{M}(\Sigma)$ aus den rationalen Funktionen $\Sigma \to \Sigma$.

(c) Sei X eine Riemannsche Fläche. Durch komponentenweise Addition und Multiplikation wird $\mathcal{O}(X)$ ein kommutativer Ring mit Eins, der (wegen des Identitätssatzes) nullteilerfrei ist. Daher besitzt $\mathcal{O}(X)$ einen Quotientenkörper K. Ist X kompakt, so gilt nach Beispiel (a) offenbar $K = \mathcal{O}(X)$; ist X hingegen nicht kompakt, so folgt aus dem Weierstraßschen Produktsatz (in der Form von Satz 4), daß K isomorph zu $\mathcal{M}(X)$ ist.

(d) Sei $\Gamma \neq \{0\}$ eine diskrete, additive Untergruppe von $\mathbb{C}$ und $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion. Dann ist $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ isomorph zum Körper $\mathcal{M}_\Gamma(\mathbb{C})$ aller meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, die Γ als Periodengruppe haben; der Isomorphismus wird durch

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma) &\to \mathcal{M}_\Gamma(\mathbb{C}) \\ f &\mapsto f \circ \pi \end{aligned}$$

gegeben.

Die meromorphen Funktionen auf dem Torus heißen *elliptische Funktionen*.

Definition 3 (Differentialformen auf Riemannschen Flächen)
Sei X eine Riemannsche Fläche, $p \in \{0,1,2\}$ und $k \in \{0,1,\dots,\infty\}$.

(a) Sei $\mathfrak{A} = (U_i, \varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein Atlas von X und $(\alpha_i)_{i \in I}$ eine Familie von p-Formen, die jeweils auf $V_i \subset \mathbb{C}$ definiert sind (diese nenne ich *lokale p-Formen*). Dann sagt man, daß (α_i) *bezüglich des Atlas $\mathfrak{A}$ eine p-Form auf X darstellt*, wenn die Verträglichkeitsbedingung

$$\forall i, j \in I \; : \; \alpha_j = (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \alpha_i \qquad \text{auf } \varphi_j(U_i \cap U_j) \tag{*}$$

erfüllt ist.

(b) Sei $\mathfrak{A}'$ ein weiterer Atlas von X und $(\alpha'_{i'})_{i' \in I'}$ eine Familie lokaler p-Formen, die bezüglich $\mathfrak{A}'$ eine p-Form darstellt. Dann nennt man (α_i) und $(\alpha'_{i'})$ *äquivalent*, wenn die Familie $\{\alpha_i | i \in I\} \cup \{\alpha'_{i'} | i' \in I'\}$ bezüglich des Atlas $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ eine p-Form vom Grad p darstellt. Dadurch wird tatsächlich eine Äquivalenzrelation definiert.

(c) Eine *p-Form auf X* ist eine Äquivalenzklasse von Familien lokaler p-Formen, die jeweils bezüglich eines Atlas von X eine p-Form darstellen. Die Elemente der Äquivalenzklasse werden als *Repräsentanten* der p-Form bezeichnet.

(d) Die Addition zweier p-Formen, die Multiplikation einer p-Form mit einer Funktion, das äußere Produkt zweier 1-Formen und der Pullback einer p-Form werden lokal mit Hilfe eines Repräsentanten definiert, erfüllen dann die Verträglichkeitsbedingung (*) und sind von der Wahl des Repräsentanten unabhängig. Daher erhält man so jeweils wieder eine p-Form auf X. Die Transformationsregeln bleiben gültig.

(e) Eine p-Form auf X heißt *k-mal stetig differenzierbar* oder eine *C^k-Differentialform* (im Falle $k = 1$ auch einfach eine *Differentialform*) *vom Grad p*, wenn die zugehörigen lokalen p-Formen k-mal stetig differenzierbar sind. ($k = 0$ bedeutet hierbei “stetig”; $k = \infty$ bedeutet “beliebig oft differenzierbar”.)

(f) Ist $k \geq 1$, so läßt sich — wegen der Vertauschbarkeit von Pullback und äußerer Ableitung — auch die äußere Ableitung einer C^k-Differentialform vom Grad $p \leq 1$ lokal definieren; so erhält man eine C^{k-1}-Differentialform vom Grad $p + 1$.

Die C^k-Differentialformen vom Grad 0 sind gerade die k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf X. Als “Ableitung” einer solchen Funktion f — insbesondere einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ — sollte man die äußere Ableitung df der Differentialform f vom Grad 0 im obigen Sinne ansehen.